CORRIGÉ 1 — 128 page 71

① $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$

② (a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

Donc $M(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$

Donc $N(\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4})$

(b) Soit $Z(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$Z(x, y, z) \in (MN) \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{MZ} = k\overrightarrow{MN} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k \end{cases}$$

(c) $$P(x, y, z) \in (MN) \cap (ABD) \iff \begin{cases} z = 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

③ (a) Supposons P, B, G alignés. On a $P \in (BG) \cap (MN)$, donc (BG) et (MN) sont des droites sécantes (car ont au moins un point commun et sont non confondues), donc les points M, N, B et G sont coplanaires.

Donc les droites (GN) et (BM) sont sécantes (car coplanaires non parallèles).

Or $\begin{cases} (GN) \subset (CDG) \\ (BM) \subset (ABE) \end{cases}$ et $(CDG) \cap (ABE) = \emptyset$ (plans parallèles), donc $(GN) \cap (BM) = \emptyset$, ce qui est absurde.

L'hypothèse initiale est donc fausse : P, Bet G sont non alignés.

(b) M, N, B et C sont coplanaires (sont tous dans (EBC)).

Or, (MN) et (BC) sont non parallèles, elles sont donc sécantes.

Appelons Q leur point d'intersection.

On a $Q \in (MN)$ et $Q \in (BC) \subset ABD)$, donc $Q \in (MN) \cap (ABD)$.

Or l'intersection d'une droite et d'un plan sécants est un point.

Donc $Q = (MN) \cap (ABD) = P$. Or $Q \in (BC)$, donc $P \in (BC)$

④ (a) Soit $Z(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$Z(x, y, z) \in (BC) \iff \exists k' \in \mathbb{R}, \overrightarrow{BZ} = k\overrightarrow{BC} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = k' \\ z = 0 \end{cases}$$

(b) $y = -\frac{1}{2} \iff k' = -\frac{1}{2}$ (question sans intérêt ?)

① Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a :
$A(0,0,0)$ et $C(1,1,0)$, donc $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ est le milieu de $[AC]$;
$F(1,0,1)$ et $H(0,1,1)$, donc $J(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ est le milieu de $[FH]$;
$B(1,0,0)$ donc $\overrightarrow{BJ}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$;
$\overrightarrow{IH}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$.
Donc $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IH}$, donc $(BJ)//(IH)$. Or $(IH)\subset(ACH)$, donc $(IH)//(ACH)$

② (a) $(\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JD})$ est un couple de vecteurs non colinéaires dans (JBD).
$(\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JD})$ est donc une direction du plan (JBD).
Supposons $(JD)//(ACH)$. Alors $\overrightarrow{JD}$ est un vecteur de (ACH).
Or, d'après la question précédente, $\overrightarrow{JB}$ est un vecteur de (ACH).
Donc $(\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JD})$ est un couple de vecteurs non colinéaires dans (ACH), c'est donc une direction du plan (ACH).
(JBD) et (ACH) ont une direction commune : ce sont des plans parallèles, ce qui est absurde. La supposition initiale est donc fausse : (JD) et (ACH) sont non parallèles, ils sont donc sécants.
Appelons K leur point d'intersection.

(b) $D(0,1,0)$ et $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ donc $\overrightarrow{DI}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$
$H(0,1,1)$ et $J(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ donc $\overrightarrow{HJ}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$
Donc $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{HJ}$, donc DIJH est un parallélogramme.
Soit K' le point d'intersection de ses diagonales.
On a $K'\in(DJ)$ et $K'\in(IH)\subset(ACH)$ donc $K'\in(DJ)\cap(ACH)$.
Or l'intersection d'un plan et d'une droite sécante est un point.
Donc $K'=(DJ)\cap(ACH)=K$

(c) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DJ}=(0,1,0)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)=(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2})$

CORRIGÉ 3 156 page 76

① $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$ sont coplanaires (il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non nuls), donc les points A, B, C, E sont coplanaires, donc $E\in(ABC)$.
De même, $F\in(ABD)$ et $G\in(BCD)$

② (a) $3\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{BE}+4\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0}\iff 3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})-2\overrightarrow{BE}+4(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{BE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$

(b) $5\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BF}+2\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{0}\iff 5(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})-\overrightarrow{BF}+2(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF})=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{BF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

(c) $-7\overrightarrow{BG}+20\overrightarrow{CG}-6\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}\iff -7\overrightarrow{BG}+20(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG})-6(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BG})=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{BG}=\frac{20}{7}\overrightarrow{BC}-\frac{6}{7}\overrightarrow{BD}$

③ (a) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=(-\frac{3}{5}+\frac{5}{6})\overrightarrow{BA}-\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{7}{30}\overrightarrow{BA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}=-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BG}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+(-\frac{4}{5}+\frac{20}{7})\overrightarrow{BC}-\frac{6}{7}\overrightarrow{BD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{72}{35}\overrightarrow{BC}+\frac{6}{7}\overrightarrow{BD}$

(b) $\overrightarrow{EG}=\frac{18}{7}\overrightarrow{EF}$, donc les points E, F, G sont alignés.